



Análisis y conclusiones que surgen de la implementación de un taller de Geometría Dinámica para alumnos del Profesorado de Matemática

Teresa del Carmen Facello, Elsa Beatriz Osio

Resumen

El uso de recursos tecnológicos, adecuadamente diseñados, puede guiar al alumno a un aprendizaje significativo. Claro está que la calidad educativa de estos medios de enseñanza dependerá del uso o explotación didáctica que realice el docente. Surge entonces la idea de realizar un taller para alumnos del Profesorado de Matemática, futuros docentes, para que incursionen en las herramientas informáticas que les ayuden a comprender mejor los procesos de construcción de las figuras geométricas para luego poderlos volcar a sus futuros alumnos.

Abstract

The use of technological resources, properly designed, can guide to the student to a significant learning. It's obvious that the educative quality of these means of education will depend of the use or didactic exploitation that realize the teacher. Arises then the idea to realize a workshop for students of the Profesorado en Matemática, future teachers, so that they can know about the computational tools that help them to comprise better the processes of building of the geometrical figures for afterwards be able to upset them to his future students.

Resumo

O uso de recursos tecnológicos, adequadamente desenhados, pode guiar ao aluno a uma aprendizagem significativa. Claro está que a qualidade educativa destes meios de ensino dependerá do uso ou exploração didáctica que realize o docente. Surge então a ideia de realizar uma oficina para alunos do Profesorado de Matemática, futuros docentes, para que incursionen nas ferramentas informáticas que lhes ajudem a compreender melhor os processos de construção das figuras geométricas para logo os poder virar a seus futuros alunos.

1. Fundamentación

Los avances de las nuevas tecnologías han generado un espacio social y de aprendizaje que puede resultar excelente aliado del docente, puesto que proporciona instancias de producción que facilitan el acercamiento entre docente y alumnos. Estos recursos pueden resultar una herramienta didáctica que facilita el proceso de enseñanza- aprendizaje por el impacto favorable que ocasiona en los alumnos. La utilización de estos recursos permitirá que el estudiante asuma un rol activo en el proceso de enseñanza-aprendizaje guiándolo hacia el desarrollo de



destrezas para la construcción de conocimientos y la formación de un pensamiento crítico. Es por esto que todo docente debería tenerla en cuenta dentro de la práctica pedagógica.

Como miembros del proyecto de investigación denominado “Enseñanza de la Geometría: Qué dar, qué no dar, qué mejorar” desarrollado en la Universidad Nacional del Comahue- Neuquén- Argentina, que tiene como objetivo investigar algunos problemas relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de esta rama de la Matemática en el Nivel Medio, y a través de una encuesta realizada a docentes de distintas escuelas de esta provincia, surge que sólo el 30% utiliza recursos informáticos en sus clases y esto se debe en gran parte a la dificultad que tienen para su implementación.

La incorporación de estos materiales didácticos a la enseñanza lleva a un replanteo del acto de cómo enseñar. Hacer esto no es sencillo ya que exige una modificación en la actitud del docente quien deberá ceder un paso a su protagonismo en la transmisión de la información, para transformarse en observador y orientador en el sentido de acompañar e incentivar a los estudiantes en el descubrimiento de conceptos, proveyendo un verdadero “andamiaje” en todo el proceso de construcción del conocimiento.

Si bien utilizar estas herramientas computacionales puede mejorar el rendimiento académico del estudiante, no siempre los docentes nos detenemos a pensar bajo qué condiciones se aplica un software educativo. La calidad educativa de estos medios de enseñanza, depende, más que de sus características técnicas, del uso didáctico que realice el docente. No es sólo instalar un software y presentar unos problemas; la utilización de estos recursos requiere un adecuado diseño que permita que el alumno asuma un rol activo en el proceso de enseñanza-aprendizaje, desarrollando destrezas en la construcción de conocimientos. El uso más productivo y significativo de la tecnología en el aprendizaje no ocurrirá si las tecnologías son empleadas sólo como vínculos que transportan contenidos e información. Las tecnologías facilitan el aprendizaje cuando satisfacen una necesidad del educando, cuando las interacciones con las tecnologías son iniciadas por el educando, controladas por él y son conceptual e intelectualmente motivadoras. Estas deben funcionar como herramientas que permitan a los mismos construir interpretaciones, significados y representaciones del mundo.

Es por esto que surge la idea de realizar un taller que tiene como objetivo hacer que los alumnos del profesorado de Matemática, futuros docentes, incursionen en las herramientas informáticas que les ayuden a comprender de mejor manera los procesos de construcción de las figuras geométricas para luego poderlos volcar a sus futuros alumnos.

Para ello se trabajó con el Cabri-, programa útil para evaluar muchas propiedades así como también sugerir contraejemplos para verificar la falsedad de algunas proposiciones. Estos programas son una herramienta muy importante tanto para los estudiantes como para los profesores y es fundamental que estos últimos conozcan las bondades de los mismos para luego integrarlos a sus clases.

2. Experiencia



2. 1. Objetivos

- Lograr que los participantes se familiaricen con el uso de los programas de geometría dinámica pudiendo intuir- inducir-deducir propiedades geométricas en general.
- Revisar los contenidos básicos de la geometría del plano.
- Explorar las posibilidades que brindan estos programas en la preparación de material didáctico

2.2. Población

Participaron de este taller 15 alumnos del Profesorado de Matemática.

2.3. Cronograma de actividades:

Este taller se desarrolló en cinco encuentros de 3 hs. cada uno, en una sala de informática. Los alumnos contaron con una guía de trabajos prácticos además de un apunte teórico en donde se presentan las propiedades básicas que deberían conocer para poder resolver los ejercicios planteados. Contaron también con un instructivo sobre el manejo del Cabri.

En los primeros tres encuentros se buscó familiarizar a los participantes con los distintos comandos del programa por medio de ejercicios de construcción y planteamiento de conjeturas sobre propiedades de las figuras. En el cuarto encuentro se mostró a los alumnos la posibilidad que brinda el Cabri para generar material didáctico. En el quinto encuentro los alumnos presentaron los trabajos finales para su evaluación.

2.4. Guía de Actividades propuestas para práctica con el Programa Cabri.

A. Verificación de propiedades

Construir figuras que permitan verificar la validez de las propiedades enunciadas a continuación. Estas verificaciones *NO REEMPLAZAN* las demostraciones formales.

A1.- En un triángulo isósceles, las alturas con respecto a los lados iguales son iguales.

A2.- En un triángulo isósceles las bisectrices correspondientes a los ángulos iguales son iguales.

A3.- En un triángulo isósceles las medianas de los lados iguales son iguales.

A4.- En cualquier triángulo la mediana correspondiente a un vértice equidista de los otros dos vértices.

A5.- En cualquier triángulo las medianas (alturas, mediatrices, bisectrices) concurren en un punto.

A6.- En un triángulo rectángulo la altura de la hipotenusa divide al ángulo recto en dos ángulos respectivamente iguales a los ángulos agudos.

A7.- La base media de un triángulo es paralela a la base e igual a su mitad.



- A8.- Los puntos medios de un cuadrilátero cualquiera forman un paralelogramo.
- A9.- Los paralelogramos (triángulos) que tienen la misma base y la misma altura, tienen la misma área.
- A10.- El ortocentro, el centroide y el circuncentro de un triángulo están alineados (recta de Euler).
- A11.- La circunferencia de los nueve puntos.
- A12.- La potencia de un punto respecto de una circunferencia es constante.
- A13.- Teorema de Ceva.
- A14.- Las diagonales de un trapecio isósceles concurren con la mediatriz de las bases.
- A15.- Recta de Simson.
- A16.- Si un hexágono (no regular) está inscripto en una circunferencia, las intersecciones de las prolongaciones de los pares de lados opuestos están alineadas.

B. Construcción de figuras planas.

- B1.- Marcar tres (cuatro, seis, n) puntos equidistantes sobre un segmento.
- B2.- Trazar la bisectriz de un ángulo cuyos lados no se cortan dentro del plano del dibujo.
- B3.- Dada una recta y un segmento exterior a ella, determinar un punto de la recta que equidiste de los extremos del segmento.
- B4.- Trazar una recta que equidiste de dos puntos dados. (Infinitas soluciones).
- B5.- Dados tres puntos no alineados A , B y C , trazar por C una recta que equidiste de A y de B .
- B6.- Trazar una recta que equidiste de tres puntos dados no alineados.
- B7.- Trazar una recta paralela a otra dada y que equidiste de dos puntos dados.
- B8.- Dada una recta y dos puntos en el mismo semiplano con respecto a la recta, determinar el camino más corto entre los dos puntos, que toque a la recta (problema del billar).
- B9.- Trazar las tangentes a una circunferencia desde un punto exterior.
- B10.- Trazar las tangentes a una circunferencia dada, que sean paralelas a una recta dada.
- B11.- Dados tres puntos no alineados, trazar la circunferencia que pase por ellos.
- B12.- Construir el arco capaz de un ángulo dado sobre un segmento dado.
- B13.- Eje radical de dos circunferencias. (Eje radical de dos circunferencias no concéntricas: lugar de los puntos que tienen la misma potencia respecto de ambas circunferencias.)
- B14.- Centro radical de tres circunferencias.

C. Lugares Geométricos



C1.- Determinar el lugar geométrico de los puntos que son centros de las circunferencias que pasan por dos puntos dados.

C2.- Por un punto pasa un haz de rectas concurrentes. Desde otro punto se trazan perpendiculares a las rectas del haz. Construir el lugar geométrico de los pies de las perpendiculares.

C3.- Un punto es fijo sobre un eje vertical. Otro punto es variable sobre un eje horizontal. Hallar el lugar geométrico de los puntos que completan un triángulo equilátero con los dos anteriores.

C4.- Construir el lugar geométrico de las circunferencias cuyo centro varía sobre una recta fija y que pasan por un punto fijo.

C5.- Construir el lugar geométrico de las circunferencias cuyo centro varía sobre una circunferencia fija y que pasan por un punto fijo.

C6.- Un segmento de longitud dada se desplaza de manera que cada extremo permanece sobre un lado de un ángulo recto. Investigar el lugar geométrico de un punto ligado al segmento (punto medio y otras posiciones)

C7.- Construir el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas de una misma longitud de una circunferencia dada.

D. Confección de plantillas.

D1.- Confección de figuras con varios ejes y centros de simetría, mediante transformaciones rígidas. (Teselaciones.)

D2.- Trazado del “hacha india”, instrumento para trisección de un ángulo. Alternativa: la “escuadra de carpintero”.

D3.- Piezas del Tangram.

D4.- Desarrollos laterales del tetraedro, cubo, octoedro, dodecaedro e icosaedro regulares.

D5.- Juegos de caras de poliedros regulares y semirregulares (arista constante).

D6.- Rompecabezas tetraedro ($6 \text{ tetraedros} \equiv 1 \text{ cubo}$).

D7.- Juego de piezas para visualización del cubo de un binomio.

2.5. Evaluación

Los participantes debieron presentar un trabajo en forma escrita y oral según las siguientes opciones:

- Exposición de un tema a elección haciendo uso del programa.
- Presentación de una guía de actividades para la enseñanza de un tema a elección para alumnos de nivel medio.
- Preparación de material concreto de tres dimensiones con el uso de dichos programas para el desarrollo de algún tema de geometría en el nivel medio.

Al término del taller los asistentes respondieron a un cuestionario escrito con la finalidad de conocer sus opiniones sobre el mismo.



2.6. Desarrollo de la experiencia

Primer encuentro: se explicó y ejercitó el uso de las distintas funciones del programa Cabri. Con ese fin se trabajó en una guía de sugerencias de verificación de propiedades de figuras planas. Los participantes mostraron interés y la sesión fue muy dinámica. El grado de habilidad de los asistentes en el manejo del programa era diverso, no obstante se mostraron muy activos en la resolución de los ejercicios propuestos, formulando las consultas pertinentes.

Segundo encuentro: Se siguió con una guía de actividades consistente en la construcción de figuras planas, aplicando propiedades de la Geometría Euclidiana. Cumpliendo uno de los objetivos del taller, se recordaron gran cantidad de definiciones y propiedades clásicas; a tal efecto, los participantes disponían de un breve catálogo de propiedades de las figuras planas (enunciados sin demostración). Se mantuvo el entusiasmo observado en la primera sesión, y algunos participantes investigaron por iniciativa propia funciones más avanzadas del programa.

Tercer encuentro: Esta sesión se dedicó a la construcción de lugares geométricos. El procedimiento para cada uno de los propuestos consistió en formular hipótesis relativas a la forma del lugar geométrico y luego construirlo para comprobar la validez de la suposición o rectificar la percepción previa. Este encuentro resultó particularmente atractivo para los participantes, que manifestaron muchas veces su sorpresa ante los resultados obtenidos.

Cuarto encuentro: Se realizó un uso poco convencional del programa, consistente en la preparación de plantillas para la construcción de materiales y herramientas que podrían ser útiles en la tarea didáctica. De este modo el programa fue utilizado como generador de dibujos. Los asistentes se mostraron interesados en la capacidad de Cabri como instrumento de diseño. Esto se manifestó en la preferencia de dicho uso para la elección del trabajo de evaluación a presentar.

Quinto encuentro, de evaluación: se presentaron seis trabajos realizado por los alumnos los que se agruparon de a dos o tres.

2.7. Resultados sobre trabajo final

Los trabajos presentados estuvieron bien planificados y expuestos (se observó una preparación cuidadosa de los mismos). En los temas elegidos se aplicaron diferentes aspectos del uso del programa. Se presentaron los siguientes trabajos:

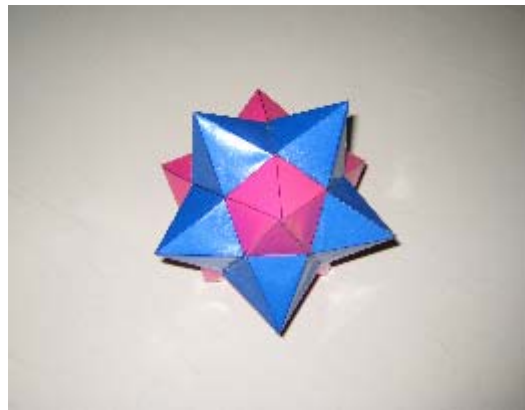
- Un par de poliedros duales. Dibujo de plantillas para construcción en materiales semirrígidos.
- Guía de trabajo práctico sobre construcción de figuras para la verificación de las propiedades: a) Suma de ángulos interiores de un triángulo. b) Visualización del teorema de Pitágoras.



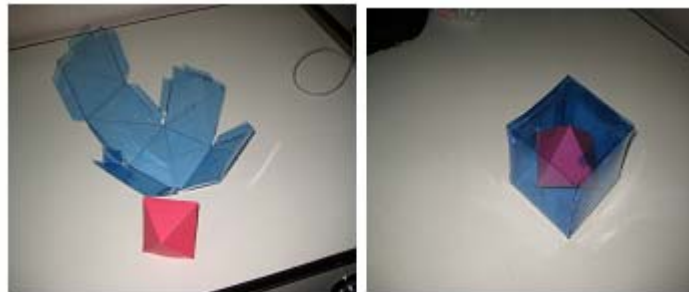
Análisis y conclusiones que surgen de la implementación de un taller de Geometría Dinámica para alumnos del Profesorado de Matemática

Teresa Facello, Elsa Osio,

- Octaedro truncado y secciones eliminadas. Dibujo de plantillas para construcción.
- Dos poliedros arquimedianos: el cuboctaedro y el tetraedro truncado. Dibujo de plantillas para construcción.
- Un problema de tangencia de circunferencia. Construcción de la solución aplicando propiedades.
- Un poliedro estrellado. Dibujo de plantillas para su construcción.



Poliedro estrellado



Poliedros duales

PROBLEMA: Construir una circunferencia que sea tangente a una circunferencia dada y a una recta dada en un punto dado de ésta.

PROPIEDAD

Si dos circunferencias admiten tangentes interiores comunes, éstas cortan a la recta de los centros en el centro de la homotecia negativa. Si existen tangentes exteriores comunes y éstas cortan a la recta de los centros, lo hacen en el centro de la homotecia positiva.

SOLUCION

Sean la circunferencia dada $C(O,r)$, la recta dada m y el punto dado A sobre m

Veamos el caso en que m es exterior.

Existen dos soluciones posibles según que la circunferencia buscada sea tangente exterior o interior a $C(O,r)$, dichas circunferencias deben encontrarse en el mismo semiplano en el que se encuentra la circunferencia dada respecto a m .

Dado que las circunferencias buscadas deben ser tangentes a m en el punto A , sus centros O_1 y O_2 deben hallarse en la recta perpendicular a m que corte en A .

Si la circunferencia buscada es tangente interior (exterior) a la $C(O,r)$, entonces existe una única recta tangente interior (exterior) común a ambas que pasa por la intersección $N_1(N_2)$ de las mismas, donde N_1 (N_2) se encuentra en la recta que une los centros O y O_1 (O_2)

Por la propiedad, el punto de contacto N_1 (N_2), es el centro de homotecia positiva (negativa) que relaciona las circunferencias.



PROCEDIMIENTO

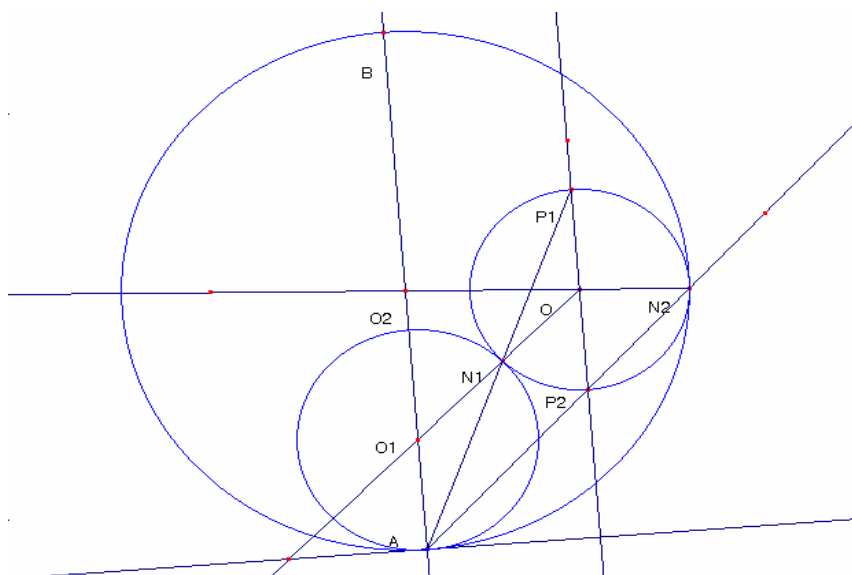
En el semiplano con respecto a la recta dada m que contiene a $C(O,r)$, trazamos la semirrecta AB perpendicular a m .

Por O trazamos la paralela a la recta AB , esta cortará a $C(O,r)$ en los puntos P_1 y P_2 .

Trazamos las semirrectas AP_1 y AP_2 , las cuales cortan a $C(O,r)$ en los puntos N_1 y N_2 respectivamente.

Se trazan las semirrectas N_1O y ON_2 que cortan a la recta AB en O_1 y O_2 respectivamente, y tomamos al segmento $O_1N_1=r_1$ y al segmento $O_2N_2=r_2$, entonces las circunferencias $C(O_1, r_1)$ y $C(O_2, r_2)$ son las circunferencias buscadas.

A través de este programa se puede observar qué sucede cuando la recta m es tangente o secante a $C(O,r)$, si variamos el radio de ésta y además, se puede mostrar como varía la gráfica ubicando en distintas posiciones la recta m , el punto A de m , el centro de la circunferencia dada.

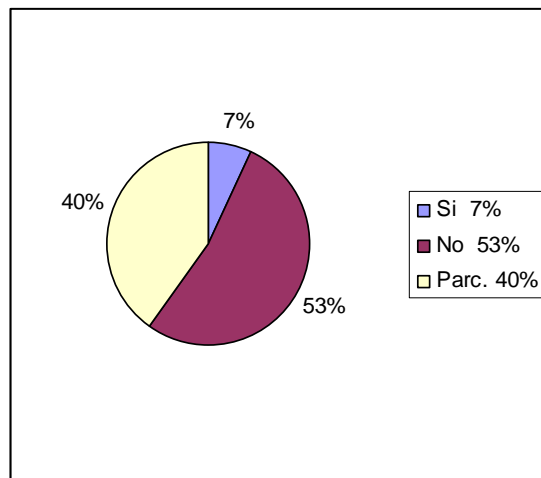


Circunferencias tangentes

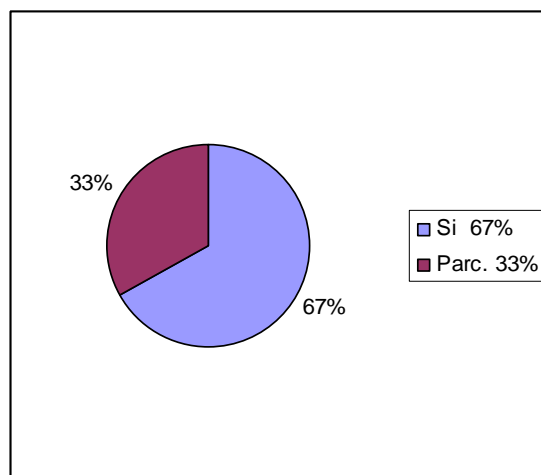
Encuesta

Una vez finalizado el taller se entregó a los participantes una encuesta que debían responder en forma individual para luego ser analizada.

1. ¿Tenía usted experiencia en el manejo del Cabri?



2.a ¿Considera que este taller le ayudo a comprender mejor su manejo?



2.b. ¿Le ayudó a comprender mejor, la importancia de este programa como herramienta didáctica? ¿Por qué?

El 100% dijo que sí le había ayudado a comprender la importancia de este programa como herramienta didáctica. En cuanto al por qué surgen los siguientes comentarios textuales:

“Sí, trabajar con este programa permite generalizar los ejercicios y mostrar como varían las variables para que los alumnos saquen sus propias conclusiones”.

“Sí, ya que es una herramienta práctica y de fácil manejo que permite generar las figuras y analizar sus propiedades”

“Sí, ya que nos permite participar activamente y esto nos motiva en el estudio de la geometría”

“Sí, me ayudó muchísimo tanto para conceptos de geometría del plano como para geometría del espacio, ya que en esta última hay conceptos difíciles de imaginar y con esta herramienta es posible verlos”.



“Sí, creo que esta herramienta incentiva más al alumno para el estudio de geometría”.

“Sí, el taller me brindó la posibilidad de planificar la clase utilizando otro instrumento de mediación, me resultó una clase más motivadora y dinámica”.

“Sí, porque pude encontrar ideas para introducir algunos contenidos escolares. El programa es una herramienta útil que permite visualizar propiedades geométricas, realizar construcciones y desarrollar la creatividad matemática”

3. ¿Considera necesario modificar algo de lo presentado en este taller?

“Nunca había usado este programa, para mi estuvo bien y no modificaría nada”

“Me gustaría ver más sobre su aplicación.”

“Me hubiera gustado tener más encuentros para poder profundizar lo que vimos.”

“No, ya que las dificultades fueron de un grado menor a uno mayor, pero comprensibles en todas las etapas.”

“Creo que se debería modificar el tiempo agregando unas horas más”

4. ¿Le interesaría completar el mismo con un segundo taller?

El 100% de los alumnos respondió que si.

5. ¿Qué conclusión saca de esta experiencia?

Con respecto a esta pregunta algunos comentarios textuales fueron los siguientes:

“Fue una propuesta interesante, quizá no pude apreciar completamente el taller ya que aún no curso geometría del plano. Pero valió la pena realizarlo.”

“Con la utilización de este programa se pudo ampliar algunos temas ya vistos en geometría plana de una manera muy buena.”

“Fue una muy buena experiencia, me ayudó a recordar los conocimientos vistos en la materia geometría del plano, a conocer curiosidades como gráficos obtenidos por simetrías, cuerpos formados con plantillas, etc, y a ver de que manera se puede utilizar en el aula”

“Mi conclusión es que el Cabri ayuda mucho para la enseñanza de la geometría y que debería enseñarse en la carrera del Profesorado de Matemática”.

“Este taller me permitió replantearme la forma de planificar y como utilizar este recurso didáctico.”

“Me pareció super enriquecedora, además de interesante y motivadora. Me gustaría que se dictaran más de este tipo de talleres que nos permiten conocer nuevas herramientas didácticas que nos servirán como futuros docentes.”

4. Conclusión

El desarrollo de este taller no sólo ha permitido familiarizar a los participantes con el programa Cabri- Géomètre, sino que también propició que los alumnos



retomaran algunos conceptos básicos de la geometría y fundamentalmente comprendieran la importancia que tiene la introducción de este tipo de software como herramienta didáctica en la enseñanza de la misma. En los trabajos presentados queda confirmada la adquisición del dominio de esta herramienta y su potencial aplicación en la enseñanza. Por todo lo mencionado consideramos que los objetivos propuestos en este taller fueron alcanzados en forma satisfactoria.

5. Proyección futura

Implementar nuevos talleres de geometría dinámica para alumnos del Profesorado de Matemática y docentes de Nivel Medio con el objetivo de familiarizar a los mismos en el manejo de estas herramientas informáticas y llevarlos a reflexionar en torno a algunos aspectos de la enseñanza de la geometría en cuanto a la actuación docente en el aula y las características del conocimiento que construye el alumno y que difiere de los correspondientes a un tratamiento mas tradicional.

Bibliografía

- Alsina, C. (2000): *Sorpresas Geométricas*. Red Olímpica.
- C. Alsina, C. Burgués, J. Fortuny (1991): *Materiales Para Construir La Geometría*. Síntesis.
- Bonomo, F. D'andrea, C. Laplagne, S. Szew, M. (1996): *Explorando La Geometría En Los Clubes Cabri*. Red Olímpica.
- Coxeter, H. (1971): *Fundamentos De Geometría*. Lisuma-Wiley.
- Lang, S. Murrow, G. Gene (1988): *Geometry*. Springer.
- Puig Adam, P. (1969): *Curso De Geometría Métrica*. Tomo I: Fundamentos. Biblioteca Matemática S. L.
- Santaló, L. A. (1993): *La Geometría En La Formación De Profesores*. Red Olímpica.
- Tirao, J. A. *El Plano*. Ed. Docencia.

FACELLO, Teresa del Carmen. Docente de Matemática y algunas disciplinas afines en diferentes niveles educativos. Docente del Dpto. de Matemática de la Fac.de Economía de la Universidad del Comahue. Miembro del proyecto de investigación "Enseñanza de la Geometría: Qué dar, qué no dar, qué mejorar.
e-mail: tfacello@uncoma.edu.ar

OSIO, Elsa Beatriz. Calculista Científica. Universidad Nacional de La Plata. Magister en Enseñanza de las Ciencias. Orientación Matemática. Universidad Nacional del Comahue. Participación en el Proyecto "*Ciencias Básicas y orientación Vocacional de articulación entre la Universidad Nacional del Comahue con escuelas Medias de Río Negro y Neuquén*". Miembro del proyecto de investigación "Enseñanza de la Geometría: Qué dar, qué no dar, qué mejorar.
e-mail: osioe@jetband.com.ar